

Eesti matemaatikaõpikutes ja -õppekavades toimuvast

Jan Willemson

<https://varamu.eu>

Kes ma olen ja miks ma tunnen huvi kooliõpikute vastu?

- Töötan Cybernetica AS-is vanemteadurina.
 - ▶ Osalen Kaitseministeeriumi tellitud uuringus, mille eesmärk on luua Eestis krüptograafiliste toodete hindamise võimekus.
 - ▶ Millegipärast ei tule ülikoolidest kaugeltki piisavas koguses kaugeltki piisava tasemega spetsialiste.
 - ▶ Intervjuud ülikoolide esindajatega näitasid, et üldhariduskoolide lõpetajate tase pole piisav, et neist saaks 3-5 aastaga vormida arvestatava tasemega krüptograafe.

Kes ma olen ja miks ma tunnen huvi kooliõpikute vastu?

- Töötan Cybernetica AS-is vanemteadurina.
 - ▶ Osalen Kaitseministeeriumi tellitud uuringus, mille eesmärk on luua Eestis krüptograafiliste toodete hindamise võimekus.
 - ▶ Millegipärast ei tule ülikoolidest kaugeltki piisavas koguses kaugeltki piisava tasemega spetsialiste.
 - ▶ Intervjuud ülikoolide esindajatega näitasid, et üldhariduskoolide lõpetajate tase pole piisav, et neist saaks 3-5 aastaga vormida arvestatava tasemega krüptograafe.
- Olen 2,5 aastat kirjutanud “Võistlusmatemaatika põhivara” (<https://varamu.eu/>).
 - ▶ Kirjutasin mustandis mitme väite kohta “Tõestuse leiad kooliõpikust”.
 - ▶ Aga kui ma hakkasin õpikutest järele vaatama, avastas, et mitmed tõestused, mis kunagi õpikutes olid, on nüüd sealt kadunud.

Sarnased kolmnurgad

Hulknurgad on sarnased, kui nende küljed on vastavalt võrdelised ja nurgad vastavalt võrdsed.

Sarnased kolmnurgad

Hulknurgad on sarnased, kui nende küljed on vastavalt võrdelised ja nurgad vastavalt võrdsed.



Kolmnurgad on sarnased, kui nende küljed on vastavalt võrdelised ja nurgad vastavalt võrdsed.

Sarnased kolmnurgad

Hulknurgad on sarnased, kui nende küljed on vastavalt võrdelised ja nurgad vastavalt võrdsed.



Kolmnurgad on sarnased, kui nende küljed on vastavalt võrdelised ja nurgad vastavalt võrdsed.



KKK



NN



KNK

Sarnased kolmnurgad

Hulknurgad on sarnased, kui nende küljed on vastavalt võrdelised ja nurgad vastavalt võrdsed.



Kolmnurgad on sarnased, kui nende küljed on vastavalt võrdelised ja nurgad vastavalt võrdsed.



KKK



NN



KNK



Kui nurga haarasid lõigata paraleelsete sirgetega, tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad. (Kiirteoreem ja kiirteteoreemi järeldus)

Kiirteteoreem, Avita 8. klassi õpik, 2015

MK

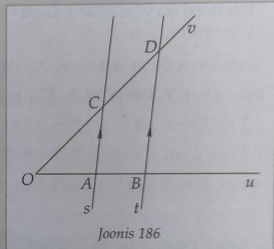
Teoreem 6.2. Kiirteteoreem. Kui lõigata nurga haarasid paralleelsete sirgetega, siis ühel haaral tekkinud lõigud on võrdelised teise haara vastavate lõikudega.

Eeldus. $s \parallel t$, s ja t lõikavad haarasid u ja v (vt jn 186)

Väide. $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$

Tõestus. Oletame, et lõikude OA ja AB pikkuste suhe on ratsionaalarv, st $\frac{OA}{AB} = \frac{p}{q}$, kus p ja q on positiivsed naturaalarvud.

Sel juhul leidub lõik pikkusega a , nii et $OA = pa$ ja $AB = qa$. Kui jaotame nüüd OA ja AB lõigu a pikkusteks osadeks ja tõmbame läbi saadud punktide sirged paralleelselt sirgetega s ja t , saame haaral v võrdsed lõigud mingi pikkusega b . Seejuures vastavalt teoreemile 6.1 $OC = pb$ ja $CD = qb$.



Joonis 186

Järelikult $\frac{OA}{OC} = \frac{pa}{pb} = \frac{a}{b}$, $\frac{AB}{CD} = \frac{qa}{qb} = \frac{a}{b}$, $\frac{OB}{OD} = \frac{pa+qa}{pb+qb} = \frac{a(p+q)}{b(p+q)} = \frac{a}{b}$ ehk $\frac{OA}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{OB}{OD}$. ■

Järeldus kiirteteoreemist

Nurga haarade lõikamisel paralleelsete sirgetega tekivad võrdeliste külgedega kolmnurgad.

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{AC}{BD}$$

Sarnasuse käsitus Eesti matemaatikaõpikutes

- Avita 8. klassi õpikus tõestatakse kiirteteoreemi ja tema järelduse abil KKK, NN ja KNK tunnused.
- Koolibri 8. klassi õpikus sõnastatakse kiirteteoreem, aga tõestust ei anta, sest see on “üsna keeruline”.
 - ▶ Tegelikult pole tõestus pindalade meetodi abil keerukam teistest samas õpikus antud tõestustest.
 - ▶ Koolibri õpikus defineeritakse sarnasust sisuliselt KKK-tunnuse kaudu. Edasi tõestatakse NN-tunnus, aga KNK-tunnus jäetakse tõestamata.
- Mauruse 8. klassi tööraamatus sõnastatakse kolmnurkade sarnasuse tunnused, jättes üldse vihjamata, et kusagil oleks vaja midagi tõestada.
 - ▶ Samas osad väited on tööraamatus tõestatud.
- Avita gümnaasiumi laia matemaatika õpiku V osas antakse definitsioon: *“Kaks tasapinnalist kujundit on sarnased, kui nende vastavad nurgad on võrdsed ja vastavad küljed võrdelised.”*

Sarnasuse teema 2002. a. ja 2011. a. õppekavades

- 2002. aasta õppekavas on kiirteteoreem ja selle järelalus, kolmnurkade sarnasuse tunnused ning hulknurkade sarnasus 7.-9. klassi materjal.
- 2011. aasta õppekavades on kiirteteoreem nihkunud 9. klassist gümnaasiumi valikkursusesse “Planimeetria I. Kolmnurkade ja ringide geomeetria”.
 - ▶ Samas on III kooliastmesse alles jäänud kolmnurkade sarnasuse tunnused. Kes iganes selle otsuse tegi, jättis tähelepanuta, et kolmnurkade sarnasuse tunnuste tõestused sõltuvad kiirteteoreemist.
 - ▶ See pani õpikute autorid ebamugava valiku ette – kas esitada ikkagi kogu sarnasuse teooria, nagu vanasti, alates kiirteteoreemi tõestusest, või proovida kuidagi lihtsamalt hakkama saada.
 - ▶ Tulemuseks ongi poolikud tõestused õpikutes.

Sarnasuse teema ja 2023. a. õppekava

- 2023. aasta õppekavas on õppesisu kirjeldamiselt mindud üle soovitatavate oskuste kirjeldamisele.
 - ▶ Vrdl tegevuspõhine eelarve?

Sarnasuse teema ja 2023. a. õppekava

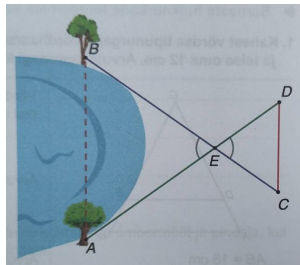
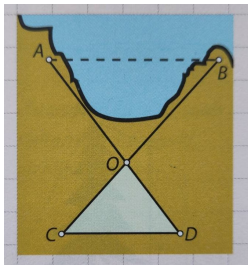
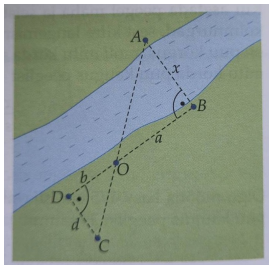
- 2023. aasta õppekavas on õppesisu kirjeldamiselt mindud üle soovitatavate oskuste kirjeldamisele.
 - ▶ Vrdl tegevuspõhine eelarve?
- Lisandunud on õppeprotsesside kirjeldused, mis loetlevad palju teemasid.
 - ▶ Need on aga ainult valikulised ja soovituslikud.
 - ▶ Õpetajale on jäetud “vabadus” õpilased nendest teemadest ilma jätta.

Sarnasuse teema ja 2023. a. õppekava

- 2023. aasta õppekavas on õppesisu kirjeldamiselt mindud üle soovitatavate oskuste kirjeldamisele.
 - ▶ Vrdl tegevuspõhine eelarve?
- Lisandunud on õppeprotsesside kirjeldused, mis loetlevad palju teemasid.
 - ▶ Need on aga ainult valikulised ja soovituslikud.
 - ▶ Õpetajale on jäetud “vabadus” õpilased nendest teemadest ilma jätta.
- Kolmnurkade sarnasus on põhikooli õppekavast kadunud.
 - ▶ Küll aga on alles hulknurkade sarnasus üsna veidras kontekstis: *“III kooliastme lõpetaja . . . kasutab probleemülesannete lahendamiseks hulknurkade sarnasust (nt maa-alade plaanistamine)”*. Kas see on nüüd näide reaalelulisuse taotlusest õppekavas?
 - ▶ Sarnasuse teemad leiame 8. klassi õppeprotsesside kirjeldusest.
 - ▶ Samas on sätestatud, et 8. klassi lõpetaja peab oskama tõestada kiirteteoreemi.

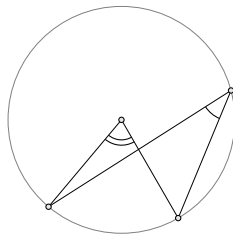
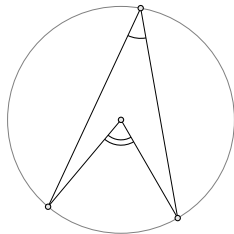
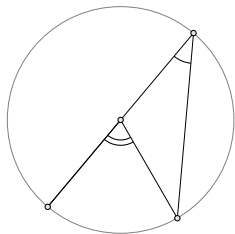
Reaalelulisuse taotlusest sarnasuse näitel

- Kõik Eesti 8. klassi õpikud kasutavad jõe/järve laiuse mõõtmise näidet sarnasuse “reaalelulise” rakendusena:



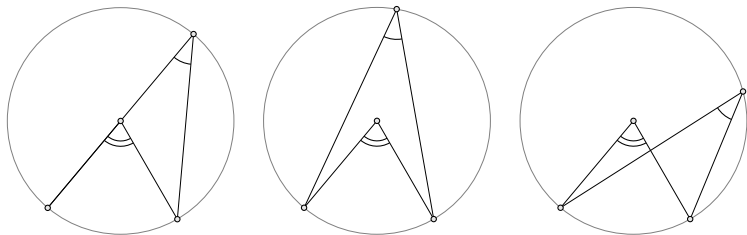
Kesknurk = 2 · piirdenurk

- Klassikaline tõestus vaatab eraldi kolme lihtsat juhtu:



Kesknurk = 2 · piirdenurk

- Klassikaline tõestus vaatab eraldi kolme lihtsat juhtu:



- Avita kirjastuse 8. klassi õpiku 2007. aasta versioonis on teoreemi tõestus antud kahe juhu kaoks kolmest ning lisaks mainitud, et kolmandat juhtu saab tõestada analoogiliselt teisega.
- Koolibri 8. klassi õpikus (2013, 2022) on samuti kaks juhtu läbi tehtud, aga kolmanda tõestuse kohta pole midagi öeldud.
- Avita kirjastuse õpiku 2015. aasta versioonis ning Mauruse 2022. aasta tööraamatus on kesk- ja piirdenurga vaheline seos lihtsalt sõnastatud, aga tõestuse kohta pole isegi vihjet antud.
 - ▶ Osa teooriat on Maurusel, tõsi küll, digis ja maksumüüri taga.

Mida ütleb õppekava?

- Nii 2011. kui 2023. aasta õppekava nõuavad kesk- ja piirdenurga vahelise seose *teadmist*.

Mida ütleb õppekava?

- Nii 2011. kui 2023. aasta õppekava nõuavad kesk- ja piirdenurga vahelise seose *teadmist*.

Filosoofiline küsimus

Kas matemaatikas saab rääkida mingi seose *teadmisesest*, kui me ei tea, *miks* see seos kehtib?

Kesk- ja piirdenurga vahelise seose järeldused

	Thalese teoreem	Piirdenurkade võrdsus
Avita	Tõestatud	Sõnastatud
Koolibri	Tõestus ülesandena ¹	Tõestatud
Maurus	Sõnastatud	Sõnastatud

¹Tõestusülesannete lahendusi pole õpikutes antud

Kesk- ja piirdenurga vahelise seose järeldused

	Thalese teoreem	Piirdenurkade võrdsus
Avita	Tõestatud	Sõnastatud
Koolibri	Tõestus ülesandena ¹	Tõestatud
Maurus	Sõnastatud	Sõnastatud

- 2023. aasta 8. klassi õppeprotsesside kirjeldus nõuab, et õpilased peavad olema suutelised tõestama Thalese teoreemi.
 - ▶ Kesk- ja piirdenurga teoreemi tõestuse teadmist pole eraldi nõutud, aga Thalese teoreemi ei saa ju ilma selleta tõestatuks pidada. Niisiis kas kesk- ja piirdenurga teoreemi tõestust tuleb ka teada?

¹Tõestusülesannete lahendusi pole õpikutes antud

Kesk- ja piirdenurga vahelise seose järeldused

	Thalese teoreem	Piirdenurkade võrdsus
Avita	Tõestatud	Sõnastatud
Koolibri	Tõestus ülesandena ¹	Tõestatud
Maurus	Sõnastatud	Sõnastatud

- 2023. aasta 8. klassi õppeprotsesside kirjeldus nõuab, et õpilased peavad olema suutelised tõestama Thalese teoreemi.
 - ▶ Kesk- ja piirdenurga teoreemi tõestuse teadmist pole eraldi nõutud, aga Thalese teoreemi ei saa ju ilma selleta tõestatuks pidada. Niisiis kas kesk- ja piirdenurga teoreemi tõestust tuleb ka teada?
- Avita kirjastuse gümnaasiumi laia matemaatika õpiku V osas väidetakse, et Thalese teoreemist järeldub, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on tema ümberringjoone diameeter.
 - ▶ See väide aga järeldub hoopis Thalese teoreemi pöördteoreemist, mida pole isegi sõnastatud, tõestamisest rääkimata.

¹Tõestusülesannete lahendusi pole õpikutes antud

Aga kus kesk- ja piirdenurga teoreemi rakendada?

- Käsi püsti, kellel on kunagi *päriselt* vaja läinud teadmist, kui suur on 82° -sele kesknurgale vastav piirdenurk!

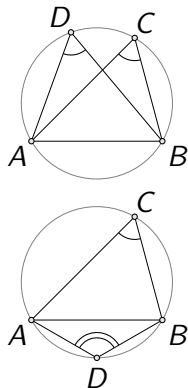
Aga kus kesk- ja piirdenurga teoreemi rakendada?

- Käsi püsti, kellel on kunagi *päriselt* vaja läinud teadmist, kui suur on 82° -sele kesknurgale vastav piirdenurk!
- Kesk- ja piirdenurga teoreemi päriselt huvitav järeldus on kõõlnelinurksuse tingimuste teoreem.

Teoreem

Vaatleme tasandil punkte A, B, C ja D .

- 1 Kui C ja D jäävad sirgest AB samale poole, asuvad punktid A, B, C ja D ühel ringjoonel parajasti siis, kui $\angle ACB = \angle ADB$.
- 2 Kui C ja D jäävad sirgest AB erinevale poole, asuvad punktid A, B, C ja D ühel ringjoonel parajasti siis, kui $\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$.



Milleks me õpetame polünoome?

Milleks me õpetame polünoome?

- Selleks, et oleks, mille peal harjutada graafikute joonistamist?

Milleks me õpetame polünoome?

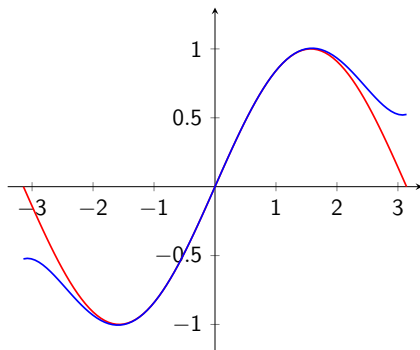
- Selleks, et oleks, mille peal harjutada graafikute joonistamist?
- Selleks, et oleks, mille peal harjutada funktsioonide uurimist?

Milleks me õpetame polünoome?

- Selleks, et oleks, mille peal harjutada graafikute joonistamist?
- Selleks, et oleks, mille peal harjutada funktsioonide uurimist?
- Selleks, et oleks, mille peal harjutada tuletiste ja integraalide arvutamist?

Milleks me õpetame polünoome?

- Selleks, et oleks, mille peal harjutada graafikute joonistamist?
- Selleks, et oleks, mille peal harjutada funktsioonide uurimist?
- Selleks, et oleks, mille peal harjutada tuletiste ja integraalide arvutamist?
- Polünoomide tegelikud rakendused on ikkagi funktsioonide lähendamises!



Willemsoni tees

- Matemaatika on omaenda edu ohver: tema lihtsad rakendused on igale poole sisse ehitatud, nii et tavainimene neid ei tajugi.
- Nõnda võib tekkida petlik arusaam, et matemaatikat polegi vaja.
- Selle arusaama murdmiseks tuleb hakata koolis näitama päris rakendusi, isegi kui nad nõuavad rohkem tööd ja süvenemist.

Willemsoni tees

- Matemaatika on omaenda edu ohver: tema lihtsad rakendused on igale poole sisse ehitatud, nii et tavainimene neid ei tajugi.
- Nõnda võib tekkida petlik arusaam, et matemaatikat polegi vaja.
- Selle arusaama murdmiseks tuleb hakata koolis näitama päris rakendusi, isegi kui nad nõuavad rohkem tööd ja süvenemist.

Willemsoni tees

Koolimatemaatika reaalelulisemaks muutmine ja lihtsustamine on teineteisele vastu käivad eesmärgid.

Veel leide: Avita 8. klassi õpik (2007), jaotis 6.7

6 RUUTVÕRRAND

Teoreem 6.1. Viète'i teoreem.

Taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ kordajad avalduvad lahendite kaudu järgmiselt:

$$\begin{aligned}x_1 \cdot x_2 &= q, \\x_1 + x_2 &= -p.\end{aligned}$$

Lahendite korrutis on võrdne vabaliikmega q ja lahendite summa on lineaarliikme kordaja p vastand arv.

Tõestus. Me teame, et ruutkolmliiget saab tegurdada kujule

$$x^2 + px + q = (x + d)(x + e).$$

Lahendite x_1 ja x_2 teadmine võimaldab asendada tundmatud suurused d ja e lahendite vastandväärtustega:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Tõepoolest, võrrandi $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ lahenditeks on samuti x_1 ja x_2 :

$$\text{kui } x = x_1, \text{ siis } 0 \cdot (x_1 - x_2) = 0;$$

6.12. Ruutkolmliikme tegurdamine

Vaatleme kõigepealt taandatud ruutvõrrandit

$$x^2 + px + q = 0,$$

millel on kaks reaalarvulist lahendit x_1 ja x_2 . Ruutvõrrandi lahendeid nimetatakse ruutkolmliikme $x^2 + px + q$ **nullkohtadeks**.

Moodustame avaldise $(x - x_1)(x - x_2)$, mille nullkohtadeks on x_1 ja x_2 . Avame sulud ja saame

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - x_2x - x_1x + x_1x_2 = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2.$$

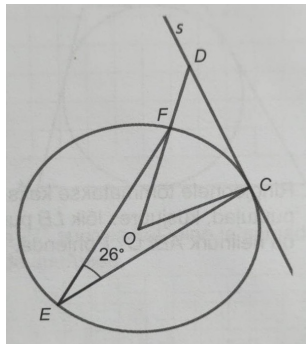
Kuid vastavalt Viète'i teoreemile $-(x_1 + x_2) = p$ ja $x_1x_2 = q$. Seega saame järgmise tulemuse:

kui ruutkolmliikmel $x^2 + px + q$ on kaks reaalarvulist nullkohta x_1 ja x_2 , siis on võimalik seda tegurdada ja kehtib valem

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

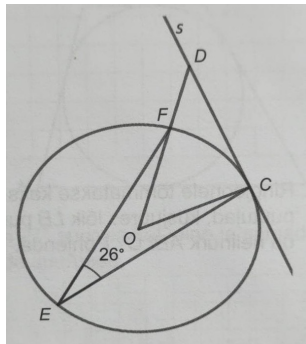
Veel leide: Mauruse 7. ja 8. klassi tööraamatute vormistus

- Punktide, sirgete ja nurkade tähistused kasutavad läbi õpiku erinevaid kirjastiile.
- Joonised on erinevalt skaleeritud, nii et joonte paksused ja tähiste suurused varieeruvad märkimisväärselt.
- Mitmed ringjooned on skaleeritud ellipsiteks. Maakaart on skaleeritud ebaõigeks.
- Valemid on kujundatud vigaselt ($+$, $=$).
- Joondused on paigast ära.



Veel leide: Mauruse 7. ja 8. klassi tööraamatute vormistus

- Punktide, sirgete ja nurkade tähistused kasutavad läbi õpiku erinevaid kirjastiile.
- Joonised on erinevalt skaleeritud, nii et joonte paksused ja tähiste suurused varieeruvad märkimisväärselt.
- Mitmed ringjooned on skaleeritud ellipsiteks. Maakaart on skaleeritud ebaõigeks.
- Valemid on kujundatud vigaselt ($+$, $=$).
- Joondused on paigast ära.
- Maurus on uustrükis lubanud asja parandada.



Kokkuvõtteks

- Eesti matemaatikaõpikute (ja teiste õppevahendite) kvaliteedikontrollisüsteem ei tööta.
- Matemaatika sidumine reaaleluga on hea eesmärk, aga tänapäevased sisulised rakendused pole ühe-kahe tunniga ära seletatavad.
- Saame näha, kas 2023. aasta eesmärgikeskne õppekava õigustab ennast või mitte.
- Õppekavadele ja nende sisule on ühiskonnas vaja haridussüsteemi välist tellijat.

Küsimused kellelegi, kes oskab neile vastata (I)

- Kuidas hakatakse 2023. aasta õppekavade baasil põhjendamist ja tõestamist süvendatumalt õpetama?
- Kelle vastutada on, et reaalselt kooli jõudvad õpikud oleksid matemaatiliselt korrektsed ning sisaldaksid väidete põhjendusi, mitte ei sõnastaks lihtsalt õhus rippuvaid tulemusi?
- Kui õpikus esinevad matemaatilised vead, siis kas mul on õigus selle õpiku kui ebakvaliteetse kauba eest raha tagasi küsida või nõuda müüjalt vigade kõrvaldamist?
- Kas sellist matemaatikaõpikut, kus pole toodud väiteid põhjendatud, saab pidada puudusega tooteks tarbijakaitseaduse mõttes?
- Kelle vastutada on, et õppekava suunaks õpikute autoreid väidete tõestusi kirja panema ning et õpetajatel oleks tahvli ees piisavalt tunniressurssi nende tõestuste esitamiseks?

Küsimused kellelegi, kes oskab neile vastata (II)

- Kui õpikute autorid keelduvad mingil põhjusel esitatud väiteid põhjendamast, siis kas on vähemalt olemas mõni koht, kus puuduvad tõestused huviliste jaoks ühte kohta kokku on korjatud?
- Miks ei esitata õpikute sabas olevates vastusepeatükkides tõestusülesannete lahendusi?
- Mida tähendab õppekavas esinev väljend “probleemülesanne”?
- Kes määrab, millised ülesanded on elulised ning millist matemaatikat elus vaja läheb? Kelle elus? Kui pikas perspektiivis?
- Mida tähendab õppekavas kasutatud fraas, et õpilane *teab* mingit matemaatilist seost või omadust? Kas see tähendab, et ta teab ainult vastava väite sõnastust või et ta teab ka seda, miks see väide kehtib?