Collatzi probleemist

Kristo Väljako

XIX Eesti Matemaatika Päevad

23. august 2024

Alternatiivsed nimed

- $3n + 1$ probleem
- Ulami hüpotees (Stanisław Ulam)
- Kakutani probleem (Shizuo Kakutani)
- Thwaitese hüpotees (Bryan Thwaites)
- Hasse algoritm (Helmut Hasse)
- Syracuse probleem (Syracuse Ülikool)

Probleemi püstitus

Olgu n (positiivne) naturaalarv.

Probleemi püstitus

Olgu n (positiivne) naturaalarv. Vaatleme funktsiooni

$$C(n) = \begin{cases} 3n+1, & (n \equiv 1 \pmod 2), \\ n/2, & (n \equiv 0 \pmod 2). \end{cases}$$

Probleemi püstitus

Olgu n (positiivne) naturaalarv. Vaatleme funktsiooni

$$C(n) = \begin{cases} 3n+1, & (n \equiv 1 \pmod 2), \\ n/2, & (n \equiv 0 \pmod 2). \end{cases}$$

Vaatleme jada

$$(n, a_1 = C(n), a_2 = C(a_1), \ldots),$$

mida nimetame arvu n *Collatzi jadaks*.

Probleemi püstitus

Olgu n (positiivne) naturaalarv. Vaatleme funktsiooni

$$C(n) = \begin{cases} 3n+1, & (n \equiv 1 \pmod 2), \\ n/2, & (n \equiv 0 \pmod 2). \end{cases}$$

Vaatleme jada

$$(n, a_1 = C(n), a_2 = C(a_1), \ldots),$$

mida nimetame arvu n *Collatzi jadaks*.
Ütleme, et see jada *lõppeb*, kui leidub h nii, et $a_h = 1$.

Probleemi püstitus

Olgu n (positiivne) naturaalarv. Vaatleme funktsiooni

$$C(n) = \begin{cases} 3n+1, & (n \equiv 1 \pmod 2), \\ n/2, & (n \equiv 0 \pmod 2). \end{cases}$$

Vaatleme jada

$$(n, a_1 = C(n), a_2 = C(a_1), \ldots),$$

mida nimetame arvu n *Collatzi jadaks*.
Ütleme, et see jada *lõppeb*, kui leidub h nii, et $a_h = 1$.

Hüpotees

Kas iga (positiivse) naturaalarvu n korral tema Collatzi jada lõppeb.

Näited

n	samme	suurim	jada
1	0	1	(1)
2	1	2	(2,1)
3	7	16	(3,10,5,16,8,4,2,1)
4	2	4	(4,2,1)
5	5	16	(5,16,8,4,2,1)
6	8	16	(6,3,10,5,16,8,4,2,1)
7	16	52	(7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1)
8	3	8	(8,4,2,1)
9	19	52	(9,28,14,7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1)
10	6	16	(10,5,16,8,4,2,1)
11	14	52	(11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1)
12	9	16	(12,6,3,10,5,16,8,4,2,1)
13	9	40	(13,40,20,10,5,16,8,4,2,1)
14	17	52	(14,7,22,11,34,17,52,26,13,40,20,10,5,16,8,4,2,1)

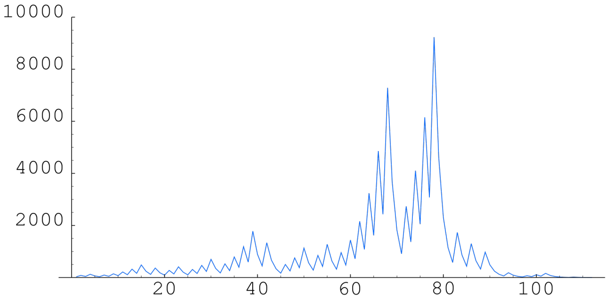
n	samme	suurim	n	samme	suurim	n	samme	suurim
15	17	160	32	5	32	49	24	148
16	4	16	33	26	100	50	24	88
17	12	52	34	13	52	51	24	232
18	20	52	35	13	160	52	11	52
19	20	88	36	21	52	53	11	160
20	7	20	37	21	112	54	112	9232
21	7	64	38	21	88	55	112	9232
22	15	52	39	34	304	56	19	56
23	15	160	40	8	40	57	32	196
24	10	24	41	109	9232	58	19	88
25	23	88	42	8	64	59	32	304
26	10	40	43	29	196	60	19	160
27	111	9232	44	16	52	61	19	184
28	18	52	45	16	136	62	107	9232
29	18	88	46	16	160	63	107	9232
30	18	160	47	104	9232	64	6	64
31	106	9232	48	11	48	65	27	196

Rahekivid

Collatzi jada nimetatakse vahel ka rahekivi (*hailstone*) jadaks.

Rahekivid

Collatzi jada nimetatakse vahel ka rahekivi (*hailstone*) jadaks.

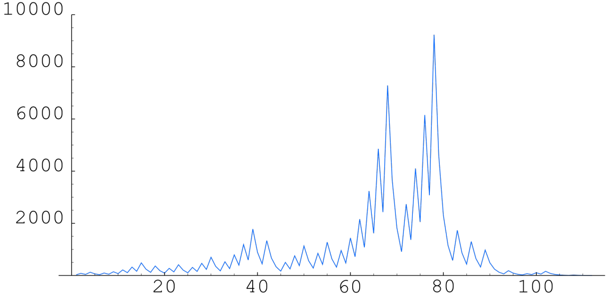


$n = 27$, kokku 111 sammu.

(27,82,41,124,62,31,94, 47,142,71,214,107,322, 161,484,242,121,364, 182,91,274,137,412,206, 103,310,155,466,233, 700,350,175,526,263, 790,395,1186,593,1780,890,445,1336,668,334,167,502,251,754,377,1132,566,283,850,425, 1276,638,319,958,479,1438,719,2158,1079,3238,1619,4858,2429,7288,3644,1822,911, 2734,1367,4102,2051,6154,3077,$\overline{9232}$,4616,2308,1154,577,1732,866,433,1300,650,325, 976,488,244,122,61,184,92,46,23,70,35,106,53,160,80,40,20,10,5,16,8,4,2,1)

Rahekivid

Collatzi jada nimetatakse vahel ka rahekivi (*hailstone*) jadaks.



$n = 27$, kokku 111 sammu.

(27,82,41,124,62,31,94, 47,142,71,214,107,322, 161,484,242,121,364, 182,91,274,137,412,206, 103,310,155,466,233, 700,350,175,526,263, 790,395,1186,593,1780,890,445,1336,668,334,167,502,251,754,377,1132,566,283,850,425, 1276,638,319,958,479,1438,719,2158,1079,3238,1619,4858,2429,7288,3644,1822,911, 2734,1367,4102,2051,6154,3077,$\overline{9232}$,4616,2308,1154,577,1732,866,433,1300,650,325, 976,488,244,122,61,184,92,46,23,70,35,106,53,160,80,40,20,10,5,16,8,4,2,1)

(Kuigi see nimetus põhineb mõnevõrra aegunud arusaamal, kuidas rahekivid pilves liiguvad.)

Lothar Collatz (1910 – 1990)

Lothar Collatz oli saksa matemaatika, kes hakkas selle probleemi peale mõtlema millaski 1928 ja 1950 aasta vahel.

Lothar Collatz (1910 – 1990)

Lothar Collatz oli saksa matemaatika, kes hakkas selle probleemi peale mõtlema millaski 1928 ja 1950 aasta vahel. (Wikipeedia andmetel avastas ta selle probleemi 1937. aastal, kuid see vist on suvaline aastaarv.)

Lothar Collatz (1910 – 1990)

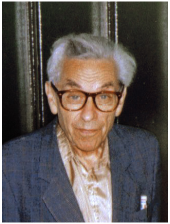
Lothar Collatz oli saksa matemaatika, kes hakkas selle probleemi peale mõtlema millaski 1928 ja 1950 aasta vahel. (Wikipeedia andmetel avastas ta selle probleemi 1937. aastal, kuid see vist on suvaline aastaarv.)

Hilisemas artiklis (1986) on Collatz öelnud, et hakkas to ajal mõtlema mitmete arvuteoreetiliste küsimuste peale ning too $(3n + 1)$-funktsiooniga seotud hüpotees oli üks huvitavamaid, kuna ta ei suutnud seda kuidagi lahendada.

Arvamusi

„Mathematics may not be ready for such problems.“

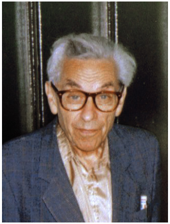
– Paul Erdös (1983)



Arvamusi

„Mathematics may not be ready for such problems.“

– Paul Erdös (1983)



„This is an extraordinarily difficult problem, completely out of reach of present day mathematics.“

– Jeffrey Lagarias (2010)

„For about a month everybody at Yale worked on it, with no result. A similar phenomenon happened when I mentioned it at the University of Chicago. A joke was made that this problem was part of a conspiracy to slow down mathematical research in the U.S.“

– Shizou Kakutani (1960)

Collatzi probleemi lahendamise eest on välja pandud järgnevad (suhteliselt tagasihoidlikud) rahalised summad:

„For about a month everybody at Yale worked on it, with no result. A similar phenomenon happened when I mentioned it at the University of Chicago. A joke was made that this problem was part of a conspiracy to slow down mathematical research in the U.S.“

– Shizou Kakutani (1960)

Collatzi probleemi lahendamise eest on välja pandud järgnevad (suhteliselt tagasihoidlikud) rahalised summad:

- \$50, Harold Coxeter;

„For about a month everybody at Yale worked on it, with no result. A similar phenomenon happened when I mentioned it at the University of Chicago. A joke was made that this problem was part of a conspiracy to slow down mathematical research in the U.S.“

– Shizou Kakutani (1960)

Collatzi probleemi lahendamise eest on välja pandud järgnevad (suhteliselt tagasihoidlikud) rahalised summad:

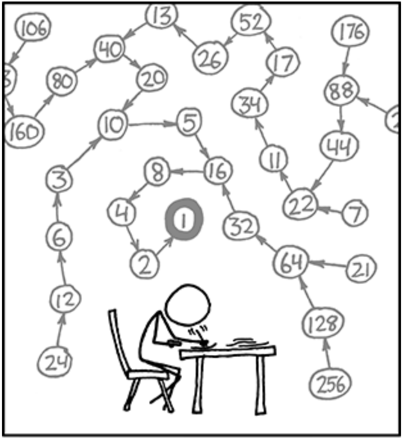
- \$50, Harold Coxeter;
- \$500, Paul Erdős;

„For about a month everybody at Yale worked on it, with no result. A similar phenomenon happened when I mentioned it at the University of Chicago. A joke was made that this problem was part of a conspiracy to slow down mathematical research in the U.S.“

– Shizou Kakutani (1960)

Collatzi probleemi lahendamise eest on välja pandud järgnevad (suhteliselt tagasihoidlikud) rahalised summad:

- $50, Harold Coxeter;
- $500, Paul Erdős;
- £1000, sir Bryan Thwaites.



THE COLLATZ CONJECTURE STATES THAT IF YOU PICK A NUMBER, AND IF IT'S EVEN DIVIDE IT BY TWO AND IF IT'S ODD MULTIPLY IT BY THREE AND ADD ONE, AND YOU REPEAT THIS PROCEDURE LONG ENOUGH, EVENTUALLY YOUR FRIENDS WILL STOP CALLING TO SEE IF YOU WANT TO HANG OUT.

Senised edusammud

Senised edusammud

Arvutite abiga on seni jõuga kontrollitud, et Collatzi hüpotees kehtib kuni arvuni

$$2,95 \cdot 10^{20}.$$

Senised edusammud

Arvutite abiga on seni jõuga kontrollitud, et Collatzi hüpotees kehtib kuni arvuni

$$2,95 \cdot 10^{20}.$$

On tõestatud, et kui leidub mõni tsükkel (mis pole $4 \to 2 \to 1 \to 4 \dots$), siis peab see koosnema vähemalt

Senised edusammud

Arvutite abiga on seni jõuga kontrollitud, et Collatzi hüpotees kehtib kuni arvuni

$$2,95 \cdot 10^{20}.$$

On tõestatud, et kui leidub mõni tsükkel (mis pole $4 \to 2 \to 1 \to 4 \ldots$), siis peab see koosnema vähemalt

$$17\,087\,915$$

liikmest (Eliahou, 1993).

Terrase teoreem

Teoreem (Terras, 1976)

„Peaaegu“ iga naturaalarvu $n \in \mathbb{N}_1$ *korral leidub tema Collatzi jadas liige* a_k*, mille korral* $a_k < n$*.*

Terrase teoreem

Teoreem (Terras, 1976)

„Peaaegu“ iga naturaalarvu $n \in \mathbb{N}_1$ *korral leidub tema Collatzi jadas liige* a_k*, mille korral* $a_k < n$*.*

Mida tähendab sõna „peaaegu“?

Terrase teoreem

Teoreem (Terras, 1976)

„Peaaegu“ iga naturaalarvu $n \in \mathbb{N}_1$ korral leidub tema Collatzi jadas liige a_k, mille korral $a_k < n$.

Mida tähendab sõna „peaaegu“?
Tähistame $\sigma(n) = \min\{k \mid C^{\circ k}(n) < n\}$ (arvu n *peatumisaeg*).

Terrase teoreem

Teoreem (Terras, 1976)

„Peaaegu“ iga naturaalarvu $n \in \mathbb{N}_1$ korral leidub tema Collatzi jadas liige a_k, mille korral $a_k < n$.

Mida tähendab sõna „peaaegu“?
Tähistame $\sigma(n) = \min\{k \mid C^{\circ k}(n) < n\}$ (arvu n *peatumisaeg*).
Tähistame veel

$$F(k) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \#\{n \mid n < x \ \& \ \sigma(n) < k\}.$$

Terrase teoreem väidab tegelikult, et kehtib

$$\lim_{k \to \infty} F(k) = 0. \tag{1}$$

Riho Terras (1939 – 2005)

Riho Terras (1939 – 2005)

- Sündinud 13. juunil 1939. aastal Tartus. Isa oli sõjaväelane Hugo Terras ja ema Agnes Terras.

Riho Terras (1939 – 2005)

- Sündinud 13. juunil 1939. aastal Tartus. Isa oli sõjaväelane Hugo Terras ja ema Agnes Terras.
- Põgenes sõja ajal Saksamaale Ulmi linna, kus alustas ka kooliteed. (Isa jäi sõja ajal kadunuks.)

Riho Terras (1939 – 2005)

- Sündinud 13. juunil 1939. aastal Tartus. Isa oli sõjaväelane Hugo Terras ja ema Agnes Terras.
- Põgenes sõja ajal Saksamaale Ulmi linna, kus alustas ka kooliteed. (Isa jäi sõja ajal kadunuks.)
- 1951. aastal emigreerus koos emaga USAsse.

Riho Terras (1939 – 2005)

- Sündinud 13. juunil 1939. aastal Tartus. Isa oli sõjaväelane Hugo Terras ja ema Agnes Terras.
- Põgenes sõja ajal Saksamaale Ulmi linna, kus alustas ka kooliteed. (Isa jäi sõja ajal kadunuks.)
- 1951. aastal emigreerus koos emaga USAsse.
- Keskhariduse omandas New Rochelle'is New Yorkis.

Riho Terras (1939 – 2005)

- Sündinud 13. juunil 1939. aastal Tartus. Isa oli sõjaväelane Hugo Terras ja ema Agnes Terras.
- Põgenes sõja ajal Saksamaale Ulmi linna, kus alustas ka kooliteed. (Isa jäi sõja ajal kadunuks.)
- 1951. aastal emigreerus koos emaga USAsse.
- Keskhariduse omandas New Rochelle'is New Yorkis.
- Astus University of Maryland'i matemaatika teaduskonda.

Riho Terras (1939 – 2005)

- Sündinud 13. juunil 1939. aastal Tartus. Isa oli sõjaväelane Hugo Terras ja ema Agnes Terras.
- Põgenes sõja ajal Saksamaale Ulmi linna, kus alustas ka kooliteed. (Isa jäi sõja ajal kadunuks.)
- 1951. aastal emigreerus koos emaga USAsse.
- Keskhariduse omandas New Rochelle'is New Yorkis.
- Astus University of Maryland'i matemaatika teaduskonda.
- 1965. aastal lõpetas bakalaureuse cum laude ning sai Milton Abramowitzi auhinna.

Riho Terras (1939 – 2005)

- Sündinud 13. juunil 1939. aastal Tartus. Isa oli sõjaväelane Hugo Terras ja ema Agnes Terras.
- Põgenes sõja ajal Saksamaale Ulmi linna, kus alustas ka kooliteed. (Isa jäi sõja ajal kadunuks.)
- 1951. aastal emigreerus koos emaga USAsse.
- Keskhariduse omandas New Rochelle'is New Yorkis.
- Astus University of Maryland'i matemaatika teaduskonda.
- 1965. aastal lõpetas bakalaureuse cum laude ning sai Milton Abramowitzi auhinna.
- 1970. aastal sain University of Illinois Urbana-Champaign'ist matemaatika doktorikraadi. Doktoritöö pealkiri on *Almost Automorphic Functions on Topological Groups* (juh. Ira David Berg).

Riho Terras (1939 – 2005)

- Sündinud 13. juunil 1939. aastal Tartus. Isa oli sõjaväelane Hugo Terras ja ema Agnes Terras.
- Põgenes sõja ajal Saksamaale Ulmi linna, kus alustas ka kooliteed. (Isa jäi sõja ajal kadunuks.)
- 1951. aastal emigreerus koos emaga USAsse.
- Keskhariduse omandas New Rochelle'is New Yorkis.
- Astus University of Maryland'i matemaatika teaduskonda.
- 1965. aastal lõpetas bakalaureuse cum laude ning sai Milton Abramowitzi auhinna.
- 1970. aastal sain University of Illinois Urbana-Champaign'ist matemaatika doktorikraadi. Doktoritöö pealkiri on *Almost Automorphic Functions on Topological Groups* (juh. Ira David Berg).
- Teadaolevalt töötas ta elu jooksul matemaatikuna järgmistes asutustes:

Riho Terras (1939 – 2005)

- Sündinud 13. juunil 1939. aastal Tartus. Isa oli sõjaväelane Hugo Terras ja ema Agnes Terras.
- Põgenes sõja ajal Saksamaale Ulmi linna, kus alustas ka kooliteed. (Isa jäi sõja ajal kadunuks.)
- 1951. aastal emigreerus koos emaga USAsse.
- Keskhariduse omandas New Rochelle'is New Yorkis.
- Astus University of Maryland'i matemaatika teaduskonda.
- 1965. aastal lõpetas bakalaureuse cum laude ning sai Milton Abramowitzi auhinna.
- 1970. aastal sain University of Illinois Urbana-Champaign'ist matemaatika doktorikraadi. Doktoritöö pealkiri on *Almost Automorphic Functions on Topological Groups* (juh. Ira David Berg).
- Teadaolevalt töötas ta elu jooksul matemaatikuna järgmistes asutustes: University of California, San Diego;

Riho Terras (1939 – 2005)

- Sündinud 13. juunil 1939. aastal Tartus. Isa oli sõjaväelane Hugo Terras ja ema Agnes Terras.
- Põgenes sõja ajal Saksamaale Ulmi linna, kus alustas ka kooliteed. (Isa jäi sõja ajal kadunuks.)
- 1951. aastal emigreerus koos emaga USAsse.
- Keskhariduse omandas New Rochelle'is New Yorkis.
- Astus University of Maryland'i matemaatika teaduskonda.
- 1965. aastal lõpetas bakalaureuse cum laude ning sai Milton Abramowitzi auhinna.
- 1970. aastal sain University of Illinois Urbana-Champaign'ist matemaatika doktorikraadi. Doktoritöö pealkiri on *Almost Automorphic Functions on Topological Groups* (juh. Ira David Berg).
- Teadaolevalt töötas ta elu jooksul matemaatikuna järgmistes asutustes: University of California, San Diego; University of Puerto Rico at Mayagüez

Riho Terras (1939 – 2005)

- Sündinud 13. juunil 1939. aastal Tartus. Isa oli sõjaväelane Hugo Terras ja ema Agnes Terras.
- Põgenes sõja ajal Saksamaale Ulmi linna, kus alustas ka kooliteed. (Isa jäi sõja ajal kadunuks.)
- 1951. aastal emigreerus koos emaga USAsse.
- Keskhariduse omandas New Rochelle'is New Yorkis.
- Astus University of Maryland'i matemaatika teaduskonda.
- 1965. aastal lõpetas bakalaureuse cum laude ning sai Milton Abramowitzi auhinna.
- 1970. aastal sain University of Illinois Urbana-Champaign'ist matemaatika doktorikraadi. Doktoritöö pealkiri on *Almost Automorphic Functions on Topological Groups* (juh. Ira David Berg).
- Teadaolevalt töötas ta elu jooksul matemaatikuna järgmistes asutustes: University of California, San Diego; University of Puerto Rico at Mayagüez ja NASA.

Riho Terras (jätk)

Riho Terras (jätk)

- Riho Terras lahkus 28. novembril 2005. aastal vähi tagajärjel San Diegos. (Elu lõpu poole kannatas ta pikalt vähi käes.)

Riho Terras (jätk)

- Riho Terras lahkus 28. novembril 2005. aastal vähi tagajärjel San Diegos. (Elu lõpu poole kannatas ta pikalt vähi käes.)

Riho Terrase abikaasa on samuti matemaatik: Audrey Terras (s. 1942, neiupõlve nimi Bowdoin).

Riho Terras (jätk)

- Riho Terras lahkus 28. novembril 2005. aastal vähi tagajärjel San Diegos. (Elu lõpu poole kannatas ta pikalt vähi käes.)

Riho Terrase abikaasa on samuti matemaatik: Audrey Terras (s. 1942, neiupõlve nimi Bowdoin). Nad kohtusid ülikooli ajal ja abiellusid 1965. aastal.

Riho Terras (jätk)

- Riho Terras lahkus 28. novembril 2005. aastal vähi tagajärjel San Diegos. (Elu lõpu poole kannatas ta pikalt vähi käes.)

Riho Terrase abikaasa on samuti matemaatik: Audrey Terras (s. 1942, neiupõlve nimi Bowdoin). Nad kohtusid ülikooli ajal ja abiellusid 1965. aastal.

> „The U.S. government paid me! And not much! It was the time of Sputnik, so we needed to produce more mathematicians, and when I was deciding between Math and History, they weren't paying me to do history, they were paying me to do math. "
>
> – Audrey Terras (2008)

Riho Terras (jätk)

Riho Terrasel oli vend Udo (14 jaan. 1931 – 1 dets. 1994).

Riho Terras (jätk)

Riho Terrasel oli vend Udo (14 jaan. 1931 – 1 dets. 1994). Tema emigreerus Saksamaalt Kanadasse, kuhu jäi elu lõpuni.

Riho Terras (jätk)

Riho Terrasel oli vend Udo (14 jaan. 1931 – 1 dets. 1994). Tema emigreerus Saksamaalt Kanadasse, kuhu jäi elu lõpuni.

Teadaolevalt tal järeltulijaid ei ole.

Riho Terras (jätk)

Riho Terrasel oli vend Udo (14 jaan. 1931 – 1 dets. 1994). Tema emigreerus Saksamaalt Kanadasse, kuhu jäi elu lõpuni.

Teadaolevalt tal järeltulijaid ei ole.

Üllatav side Euroopa parlamendisaadiku Riho Terrasega.

Terrase teoreemi parandused

Terrase teoreemi parandused

Terrase teoreemi on aastate jooksul mõnevõrra suudetud parandada:

Terrase teoreemi parandused

Terrase teoreemi on aastate jooksul mõnevõrra suudetud parandada:

Teoreem (Allouche, 1979)

Peaaegu iga (positiivse) naturaalarvu $n \in \mathbb{N}_1$ korral leidub tema Collatzi jadas liige a_k, mille korral $a_k < n^{0,896}$.

Terrase teoreemi parandused

Terrase teoreemi on aastate jooksul mõnevõrra suudetud parandada:

Teoreem (Allouche, 1979)

Peaaegu iga (positiivse) naturaalarvu $n \in \mathbb{N}_1$ *korral leidub tema Collatzi jadas liige* a_k*, mille korral* $a_k < n^{0{,}896}$.

Teoreem (Korec, 1994)

Peaaegu iga (positiivse) naturaalarvu $n \in \mathbb{N}_1$ *korral leidub tema Collatzi jadas liige* a_k*, mille korral* $a_k < n^{0{,}7925}$.

Terrase teoreemi parandused

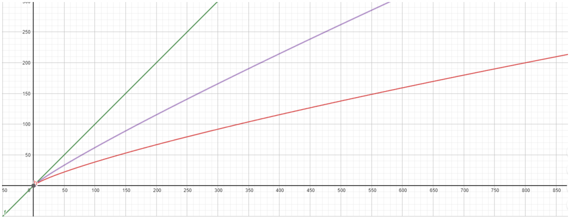
Terrase teoreemi on aastate jooksul mõnevõrra suudetud parandada:

Teoreem (Allouche, 1979)

Peaaegu iga (positiivse) naturaalarvu $n \in \mathbb{N}_1$ korral leidub tema Collatzi jadas liige a_k, mille korral $a_k < n^{0,896}$.

Teoreem (Korec, 1994)

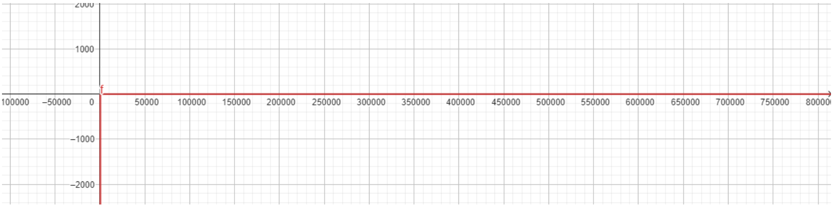
Peaaegu iga (positiivse) naturaalarvu $n \in \mathbb{N}_1$ korral leidub tema Collatzi jadas liige a_k, mille korral $a_k < n^{0,7925}$.



Tao teoreem

Teoreem (Tao, 2019)

Peaaegu iga (positiivse) naturaalarvu $n \in \mathbb{N}_1$ korral leidub tema Collatzi jadas liige a_k, mille korral $a_k < f(n)$, kus f on monotoonselt kasvav funktsioon, mille korral $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.



$$f(x) = \log(\log(x))$$

Terence Tao (s. 1975)

„This is about as close as one can get to the Collatz conjecture without actually solving it "

– Terence Tao (2020)

Terence Tao (s. 1975)

„This is about as close as one can get to the Collatz conjecture without actually solving it “

– Terence Tao (2020)

- Terence Tao on sündinud 1975. aastal Austraalias Hiina päritolu vanematele.

Terence Tao (s. 1975)

„This is about as close as one can get to the Collatz conjecture without actually solving it “

– Terence Tao (2020)

- Terence Tao on sündinud 1975. aastal Austraalias Hiina päritolu vanematele.
- Teda peetakse laialdaselt parimaks elus olevaks matemaatikuks.

Terence Tao (jätk)

Terence Tao (jätk)

- Talle on antud väga palju erinevaid auhindasid sh

Terence Tao (jätk)

- Talle on antud väga palju erinevaid auhindasid sh
  – Fieldsi medal,

Terence Tao (jätk)

- Talle on antud väga palju erinevaid auhindasid sh
  - Fieldsi medal,
  - Royal medal,

Terence Tao (jätk)

- Talle on antud väga palju erinevaid auhindasid sh
  - Fieldsi medal,
  - Royal medal,
  - Breakthrough Prize in Mathematics.

Terence Tao (jätk)

- Talle on antud väga palju erinevaid auhindasid sh
  – Fieldsi medal,
  – Royal medal,
  – Breakthrough Prize in Mathematics.
- Oma elu jooksul on ta avaldanud (autorina või kaasautorina) üle 300 teadusartikli.

Terence Tao (jätk)

- Talle on antud väga palju erinevaid auhindasid sh
  – Fieldsi medal,
  – Royal medal,
  – Breakthrough Prize in Mathematics.
- Oma elu jooksul on ta avaldanud (autorina või kaasautorina) üle 300 teadusartikli.

Paul Erdös koos 10 aastase Terence Taoga.

Collatzi probleemi üldistused

Collatzi probleemi üldistused

Kui vaadelda Collatzi probleemi iga täisarvu jaoks, siis tekivad meil järgnevad tsüklid:

Collatzi probleemi üldistused

Kui vaadelda Collatzi probleemi iga täisarvu jaoks, siis tekivad meil järgnevad tsüklid:

- $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow \ldots$

Collatzi probleemi üldistused

Kui vaadelda Collatzi probleemi iga täisarvu jaoks, siis tekivad meil järgnevad tsüklid:

- $4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \dots$
- $0 \to 0 \to \dots$

Collatzi probleemi üldistused

Kui vaadelda Collatzi probleemi iga täisarvu jaoks, siis tekivad meil järgnevad tsüklid:

- $4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \dots$
- $0 \to 0 \to \dots$
- $-1 \to -2 \to -1 \to \dots$

Collatzi probleemi üldistused

Kui vaadelda Collatzi probleemi iga täisarvu jaoks, siis tekivad meil järgnevad tsüklid:

- $4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \dots$
- $0 \to 0 \to \dots$
- $-1 \to -2 \to -1 \to \dots$
- $-5 \to -14 \to -7 \to -20 \to -10 \to -5 \to \dots$

Collatzi probleemi üldistused

Kui vaadelda Collatzi probleemi iga täisarvu jaoks, siis tekivad meil järgnevad tsüklid:

- $4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \dots$
- $0 \to 0 \to \dots$
- $-1 \to -2 \to -1 \to \dots$
- $-5 \to -14 \to -7 \to -20 \to -10 \to -5 \to \dots$
- $-17 \to -50 \to -25 \to -74 \to -37 \to -110 \to -55 \to -164 \to -82 \to -41 \to -122 \to -61 \to -182 \to -91 \to -272 \to -136 \to -68 \to -34 \to -17 \to \dots$

Collatzi probleemi üldistused

Kui vaadelda Collatzi probleemi iga täisarvu jaoks, siis tekivad meil järgnevad tsüklid:

- $4 \to 2 \to 1 \to 4 \to \dots$
- $0 \to 0 \to \dots$
- $-1 \to -2 \to -1 \to \dots$
- $-5 \to -14 \to -7 \to -20 \to -10 \to -5 \to \dots$
- $-17 \to -50 \to -25 \to -74 \to -37 \to -110 \to -55 \to -164 \to -82 \to -41 \to -122 \to -61 \to -182 \to -91 \to -272 \to -136 \to -68 \to -34 \to -17 \to \dots$
- $\dots$?

Olgu $m \in \mathbb{N}_1$. *Üldistatud Collatzi funktsiooniks* nimetatakse funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} q_1 x + p_1, & (x \equiv 0 \pmod{m}), \\ q_2 x + p_2, & (x \equiv 1 \pmod{m}), \\ \dots \\ q_m x + p_m, & (x \equiv m-1 \pmod{m}), \end{cases}$$

kus $q_1, \dots, q_m, p_1, \dots, p_m \in \mathbb{Q}$.

FRACTRAN

FRACTRAN

John Horton Conway (1937 – 2020) leiutas üldistatud Collatzi funktsioone uurides „programmeerimiskeele“ FRACTRAN (1987).

FRACTRAN

John Horton Conway (1937 – 2020) leiutas üldistatud Collatzi funktsioone uurides „programmeerimiskeele“ FRACTRAN (1987).

FRACTRANi programm on lihtsalt mingi lõplik murdude jada $\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right)$.

FRACTRAN

John Horton Conway (1937 – 2020) leiutas üldistatud Collatzi funktsioone uurides „programmeerimiskeele“ FRACTRAN (1987).

FRACTRANi programm on lihtsalt mingi lõplik murdude jada $\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right)$.
Programmi käitamise all mõeldakse, et mingi sisendi, naturaalarvu n, korral käitutakse järgnevalt:

FRACTRAN

John Horton Conway (1937 – 2020) leiutas üldistatud Collatzi funktsioone uurides „programmeerimiskeele“ FRACTRAN (1987).

FRACTRANi programm on lihtsalt mingi lõplik murdude jada $\left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}\right)$.
Programmi käitamise all mõeldakse, et mingi sisendi, naturaalarvu n, korral käitutakse järgnevalt:

- otsime programmis esimese murru, mille korral $n\frac{a_k}{b_k} \in \mathbb{N}$, ning sel juhul jätkame $n \to n\frac{a_k}{b_k}$;

FRACTRAN

John Horton Conway (1937 – 2020) leiutas üldistatud Collatzi funktsioone uurides „programmeerimiskeele“ FRACTRAN (1987).

FRACTRANi programm on lihtsalt mingi lõplik murdude jada $(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n})$.
Programmi käitamise all mõeldakse, et mingi sisendi, naturaalarvu n, korral käitutakse järgnevalt:

- otsime programmis esimese murru, mille korral $n\frac{a_k}{b_k} \in \mathbb{N}$, ning sel juhul jätkame $n \to n\frac{a_k}{b_k}$;
- kui ühegi programmis toodud murru korral ei jagu n murru nimetajada, siis anname murru n välja.

Liitmine ja korrutamine

Liitmine

Liitmine ja korrutamine

Liitmine

Vaatleme programmi

$$\left(\frac{3}{2}\right).$$

Liitmine ja korrutamine

Liitmine

Vaatleme programmi

$$\left(\frac{3}{2}\right).$$

See programm annab $2^a 3^b \to 3^{a+b}$.

Liitmine ja korrutamine

Liitmine

Vaatleme programmi

$$\left(\frac{3}{2}\right).$$

See programm annab $2^a 3^b \to 3^{a+b}$.

Korrutamine

Liitmine ja korrutamine

Liitmine

Vaatleme programmi

$$\left(\frac{3}{2}\right).$$

See programm annab $2^a 3^b \to 3^{a+b}$.

Korrutamine

Vaatleme programmi

$$\left(\frac{455}{33}, \frac{11}{13}, \frac{1}{11}, \frac{3}{7}, \frac{11}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

Liitmine

Vaatleme programmi

$$\left(\frac{3}{2}\right).$$

See programm annab $2^a3^b \to 3^{a+b}$.

Korrutamine

Vaatleme programmi

$$\left(\frac{455}{33}, \frac{11}{13}, \frac{1}{11}, \frac{3}{7}, \frac{11}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

See programm annab $2^a3^b \to 5^{ab}$.

Korrutamisest pikemalt

Korrutamisest pikemalt

$$\left(\frac{5 \cdot 7 \cdot 13}{3 \cdot 11}, \frac{11}{13}, \frac{1}{11}, \frac{3}{7}, \frac{11}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

Korrutamisest pikemalt

$$\left(\frac{5 \cdot 7 \cdot 13}{3 \cdot 11}, \frac{11}{13}, \frac{1}{11}, \frac{3}{7}, \frac{11}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

Katsetused tahvlil:
$2^3 \cdot 3^0 \to \dots$

Korrutamisest pikemalt

$$\left(\frac{5\cdot 7\cdot 13}{3\cdot 11}, \frac{11}{13}, \frac{1}{11}, \frac{3}{7}, \frac{11}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

Katsetused tahvlil:
$2^3 \cdot 3^0 \to \dots$

$2 \cdot 3^2 \to \dots$

Korrutamisest pikemalt

$$\left(\frac{5 \cdot 7 \cdot 13}{3 \cdot 11}, \frac{11}{13}, \frac{1}{11}, \frac{3}{7}, \frac{11}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

Katsetused tahvlil:

$2^3 \cdot 3^0 \to \dots$

$2 \cdot 3^2 \to \dots$

$2^2 \cdot 3^2 \to \dots$

Korrutamisest pikemalt

$$\left(\frac{5\cdot 7\cdot 13}{3\cdot 11}, \frac{11}{13}, \frac{1}{11}, \frac{3}{7}, \frac{11}{2}, \frac{1}{3}\right)$$

Katsetused tahvlil:

$2^3 \cdot 3^0 \to \dots$

$2 \cdot 3^2 \to \dots$

$2^2 \cdot 3^2 \to \dots$

$2^n \cdot 3^m \to \dots$

FRACTRANi võimekus

FRACTRANi võimekus

Osutub, et FRACTRAN on Turingi täielik

FRACTRANi võimekus

Osutub, et FRACTRAN on Turingi täielik st FRACTRANis on võimalik teha kõike, mida arvutitega.

FRACTRANi võimekus

Osutub, et FRACTRAN on Turingi täielik st FRACTRANis on võimalik teha kõike, mida arvutitega.

PRIME:

FRACTRANi võimekus

Osutub, et FRACTRAN on Turingi täielik st FRACTRANis on võimalik teha kõike, mida arvutitega.

PRIME:
Osutub, et programm

$$\left(\frac{17}{91}, \frac{78}{85}, \frac{19}{51}, \frac{23}{38}, \frac{29}{33}, \frac{77}{29}, \frac{95}{23}, \frac{77}{19}, \frac{1}{17}, \frac{11}{13}, \frac{13}{11}, \frac{15}{2}, \frac{1}{7}, \frac{55}{1}\right)$$

leiab järjestike algarve.

Kasutatud kirjandus

- Lothar Collatz (1986), *On the Motivation and Origin of the (3n+1)-Problem*, J. of Qufu Normal University, Natural Science Edition, 12 (1986) No. 3, 9–11 (Chinese).
- Tao, Terence (2020). *The Notorious Collatz Conjecture*. `https://ve42.co/Tao2020`
- Terras, Riho (1976). *A stopping time problem on the positive integers*. Acta Arithmetica. 30 (3): 241–252.
- Conway, J. H. (1987). *Fractran: A simple universal programming language for arithmetic*. In Open problems in Communication and Computation (pp. 4-26). Springer, New York, NY.
- Kasulik FRACTRANi veebirakendus: `https://trkern.itch.io/fractran`